۱۹) $-1<a<0$ بنابراین a منفی است و اگر به توان زوج برسد، مثبت میشود و اگر به توان فرد برسد منفی باقی می ماند. بنابراین مقایسه بین a^2، a^4، ... ، a^{100} است (زیرا این اعداد مثبت هستند و از اعداد منفی a، a^3، ... ، a^{99} بزرگتر هستند)

$a=-\frac{x}{y} \quad 0<x<y$

در بین اعداد $a^2, a^4, \dots$، a^{100} کوچکترین عدد a^{100} است، زیرا مخرج بزرگتر شده و چون رشد صورت از رشد مخرج کمتر است، عدد کوچکتر میشود.

a^2 بزرگترین عدد است.

مثال: $a=-\frac{1}{2}$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$
$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{100}=\frac{1}{2^{100}} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2>\left(-\frac{1}{2}\right)^{100}$$

---

۲۰) الف) $2^{800}, 3^{600}, 5^{400}, 6^{200}$

$$(2^4)^{200}, (3^3)^{200}, (5^2)^{200}, 3^{200}\times 2^{200} \Rightarrow 16^{200}, 27^{200}, 25^{200}, 3^{200}\times 2^{200}$$

بین ۳ عدد اول مقایسه واضح است و داریم: $16^{200}<25^{200}<27^{200}$

اما برای مقایسه عدد $2^{200}\times 3^{200}$ کافیست ضریب 2^{200} را در اعداد بالا، با عدد 3^{200} مقایسه کنیم. فرض:

$$\left.\begin{aligned}16^{200}&=2^{200}\times 8^{200}\\ 6^{200}&=2^{200}\times 3^{200}\end{aligned}\right\} \Rightarrow 16^{200}>6^{200}$$

$$\Rightarrow \boxed{6^{200}<2^{800}<5^{400}<3^{600}}$$

ب) $3^{3333}, 2^{5555}, 6^{2222} \Rightarrow (3^3)^{1111}, (2^5)^{1111}, ((3\times 2)^2)^{1111}$

$$\Rightarrow 27^{1111}, 32^{1111}, 9^{1111}\times 4^{1111}$$

مقایسه دو عدد اول و دوم مشخص است $27^{1111}<32^{1111}$ اما عدد $9^{1111}\times 4^{1111}$ با عدد 32^{1111} به این صورت مقایسه می کنیم:

$$\left.\begin{aligned}32^{1111}&=4^{1111}\times 8^{1111}\\ 6^{2222}&=4^{1111}\times 9^{1111}\end{aligned}\right\} \Rightarrow 6^{2222}>32^{1111}$$

$$\Rightarrow \boxed{3^{3333}<2^{5555}<6^{2222}}$$

۷)

$$\left(\frac{20}{8}\right)^{\cdots} = \left(\frac{4}{25}\right)^{1-x} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{\cdots} = \left(\left(\frac{2}{5}\right)^{2}\right)^{1-x}$$

$$\frac{20}{8} = \frac{5}{2} \qquad \frac{4}{25} = \left(\frac{2}{5}\right)^{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{\cdots} = \left(\frac{2}{5}\right)^{2-2x} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-2+2x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cdots = -2+2x}$$

---

۸) الف)

$$3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 360$$

$$3^{x}(\underbrace{1+3+9+27}_{40}) = 360 \Rightarrow 3^{x} = \frac{360}{40} = 9 = 3^{2} \Rightarrow \boxed{x=2}$$

ج)

$$5^{2x} \times 2^{2x+2} = 0.004 \Rightarrow 5^{2x} \times 2^{2x+2} = \frac{4}{1000} = \frac{2^{2}}{2^{3}\times 5^{3}} = \frac{1}{2\times 5^{3}}$$

$$\Rightarrow 5^{2x} \times 5^{3} = \frac{1}{2^{2x+2}\times 2^{1}} \Rightarrow 5^{2x+3} = \frac{1}{2^{2x+3}} = 2^{-2x-3}$$

توانی از ۲ با توانی از ۵ برابر نیست، مگر آنکه توان صفر باشد ⇐ $2x+3=0$ ⇐ $\boxed{x = -\frac{3}{2}}$

$x = -\frac{3}{2}$ ⇐ $-2x-3=0$

د)

$$7^{2x^{2}+1} = 49^{2} \times 6 \times 7^{4} + 49^{x^{2}} \Rightarrow 7^{2x^{2}+1} - 49^{x^{2}} = \overset{7^{4}}{49^{2}} \times 6 \times 7^{4}$$

$$\Rightarrow 7^{2x^{2}+1} - 7^{2x^{2}} = 6\times 7^{8} \Rightarrow 7^{2x^{2}}(\underbrace{7-1}_{6}) = 6\times 7^{8}$$

$$\Rightarrow 7^{2x^{2}} = 7^{8} \Rightarrow 2x^{2} = 8 \Rightarrow x^{2} = 4 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2}$$

ه)

$$\frac{25^{x} + 5^{2x-1}}{9^{x-1} + 3^{2x-1}} = \frac{15}{2} \Rightarrow \frac{5^{2x} + 5^{2x-1}}{3^{2x-2} + 3^{2x-1}} = \frac{3\times 5}{2} \Rightarrow \frac{5^{2x-1}(5+1)}{3^{2x-2}(1+3)} = \frac{3\times 5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{5^{2x-1}}{3^{2x-2}} = 5 \Rightarrow \frac{5^{2x-1}}{5} = 3^{2x-2} \Rightarrow 5^{2x-2} = 3^{2x-2} \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

و)

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-x-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2x+1}$$

$$\Rightarrow -x-2 = -2x+1 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

ز)

$$64^{x^{2}} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{x} = \left(\frac{1}{2}\right) \times (2^{x})^{2} \Rightarrow 2^{6x^{2}} \times 2^{-3x} = 2^{-1} \times 2^{2x}$$

$$\Rightarrow 6x^{2} - 5x + 1 = 0 \Rightarrow (6x-2)(6x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{3}} \\ 6x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}} \end{cases}$$

پایه نهم   سری ۲   توان

۱) الف) $-2\times 3^{-1}\times(2^{-1}\times 3^{-1})^{-2} = -2\times\frac{1}{3}\times 2^{2}\times 3^{2} = -2^{3}\times 3 = -8\times 9$

$= \boxed{-72}$

فقط ۱ به توان ۲ می‌رسد

ب) $-2\times(-2^{-1}\times -4^{-1^{2}})^{-3} = -2\times(\frac{-1}{2}\times -4^{-1})^{-3} = -2\times(\frac{-1}{2}\times\frac{-1}{4})^{-3}$

$= -2\times(\frac{1}{8})^{-3} = -2\times 8^{3} = -2\times(2^{3})^{3} = -2\times 2^{9}$

$= \boxed{-2^{10}}$

دقت شود چون براکت نداریم، فقط ۲ به توان ۱- می‌رسد

ج) $\frac{50^{50}}{25^{25}} = \frac{25^{50}\times 2^{50}}{25^{25}} = 25^{25}\times 2^{50} = 25^{25}\times(2^{2})^{25} = (25\times 4)^{25}$

$= \boxed{100^{25}}$

۲)

الف) اگر $0<a<1$ ، $m,n\in \mathbb{N}$ ، $m>n \Leftarrow a^{m}>a^{n}$

گزاره غلط است، زیرا اگر $0<a<1$ باشد، داریم: $0<x<y$ $a=\frac{x}{y}$

بنابراین وقتی a به توان عدد بزرگتری می‌رسد، رشد مخرج از صورت بیشتر بوده و کسر حاصل کوچکتر می‌شود $\Leftarrow$ $0<a<1,\ m>n \Rightarrow a^{m}<a^{n}$

می‌توان با یک مثال نقض هم نشان داد.

$$\left.\begin{array}{l} a=\frac{1}{2} \\ a^{3}=\frac{1}{8} \\ a^{2}=\frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow 3>2 \quad a^{3}<a^{2}$$

ب) $a^{m}=\frac{1}{a^{n}} \Leftarrow m=\frac{1}{n}$ ، $m,n\in\mathbb{N}$ ، $0<a<1$

گزاره غلط است. با توجه به شرط $m,n\in\mathbb{N}$ ، $m=\frac{1}{n}$ تنها یک مقدار برای m,n داریم که برابر است با $m=n=1$

بنابراین $a^{m}=a^{1}$ ، $a^{n}=a^{1}$ ، اما گزاره ادعا می‌کند $a^{1}=\frac{1}{a^{1}}$ یعنی هر عدد بین صفر و یک با معکوس خودش برابر است، این گزاره صحیح نیست، زیرا اگر $0<a<1$ باشد $a<\frac{1}{a}$ است.

مثال: $a=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a}=2 \Rightarrow \frac{1}{a}>2$ $\{a=\frac{x}{y}\ \ 0<x<y \Rightarrow \frac{1}{a}=\frac{y}{x}\ \ y>x\}$

۵) الف)

$(3a-b)^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 3a-b=2$

$8^{a} \div (0.5)^{1-b} = \frac{2^{3a}}{(\frac{1}{2})^{1-b}} = \frac{2^{3a}}{2^{-1+b}} = 2^{3a-b+1} = 2^{2+1} = 2^{3} = \boxed{8}$

ب)

$\left.\begin{aligned}\frac{a}{b} &= a^{3b}\\ ab &= a^{b}\end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{درهم ضرب می‌کنیم}} \frac{a}{b}\times ab = a^{3b}\times a^{b} \Rightarrow a^{2} = a^{4b} \xRightarrow{a>1} 2=4b \Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{2}}$

$\frac{a}{b} = a^{3b} \xRightarrow{b=\frac{1}{2}} 2a = a^{\frac{3}{2}} \xRightarrow[a\neq 0]{} 2 = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{1}} = a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (2)^{2} = (a^{\frac{1}{2}})^{2} \Rightarrow \boxed{4=a}$

$b^{-a} = (\frac{1}{2})^{-4} = 2^{4} = \boxed{16}$

ج)

$\left.\begin{aligned}4^{ab} &= b\\ 2^{a} &= b\end{aligned}\right\} \Rightarrow 4^{ab} = 2^{a} \Rightarrow 2^{2ab} = 2^{a} \Rightarrow 2ab = a \xRightarrow{a\neq 0} 2b-1=0 \Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{2}}$

$2^{a} = b \Rightarrow 2^{a} = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Rightarrow \boxed{a=-1}$ $\qquad a-b = -1-\frac{1}{2} = \boxed{\frac{-3}{2}}$

د)

$\frac{9^{x}+3^{2x+1}}{2^{3x+1}+8^{x+1}} = 0.45 \Rightarrow \frac{3^{2x}+3^{2x+1}}{2^{3x+1}+2^{3x+3}} = \frac{3^{2}}{2^{2}\times 5}$

$\Rightarrow \frac{3^{2x}(1+3)}{2^{3x+1}(\cancel{1+4})} = \frac{3^{2}}{2^{2}\times \cancel{5}} \Rightarrow 3^{2x}\times 2^{4} = 3^{2}\times 2^{3x+1} \Rightarrow 3^{2x-2} = 2^{3x-3}$

تنها توان ۲ و ۳ که با هم برابرند صفر است ⇐

$2x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$3x-3=0 \Rightarrow x=1$ ✓

$\frac{x+1}{3x+5} = \frac{1+1}{3+5} = \frac{2}{8} = \boxed{\frac{1}{4}}$

---

۶)

$\frac{9^{x+y}}{3^{5y}} = 243 \Rightarrow \frac{3^{2x+2y}}{3^{5y}} = 3^{5} \Rightarrow 3^{2x-3y} = 3^{5} \Rightarrow 2x-3y=5$

$\frac{4^{x}}{2^{x+y}} = 8 \Rightarrow \frac{2^{2x}}{2^{x+y}} = 2^{3} \Rightarrow 2^{x-y} = 2^{3} \Rightarrow x-y=3$

$-2\begin{cases}2x-3y=5\\ x-y=3\end{cases} \Rightarrow +\begin{cases}\cancel{2x}-3y=5\\ -\cancel{2x}+2y=-6\end{cases} \qquad -y=-1 \Rightarrow \boxed{y=1} \qquad \begin{aligned}&x-y=3\\ &x-1=3 \Rightarrow \boxed{x=4}\end{aligned}$

$\boxed{xy = 1\times 4 = 4}$

ز) $m,n \in \mathbb{Z}$ ، آنگاه $a^m \div a^n = a^{m-n}$

با شرط $a \neq 0$ لزوماً، این رابطه، طبق روابط توان صحیح است، و می‌توان درستی آن را نشان داد.

۳)

$$\underbrace{5^x + 5^x + \dots + 5^x}_{\text{تا } 25} + \underbrace{5^{x+2} + \dots + 5^{x+2}}_{\text{تا } 124} + \underbrace{5^{x+5} + \dots + 5^{x+5}}_{\text{تا } 624}$$

$$= 25 \times 5^x + 124 \times 5^{x+2} + 624 \times 5^{x+5}$$

$$= \underbrace{\underbrace{5^2 \times 5^x}_{5^{x+2}} + 124 \times 5^{x+2}}_{125 \times 5^{x+2} = 5^3 \times 5^{x+2} = 5^{x+5}} + 624 \times 5^{x+5}$$

$$= 5^{x+5} + 624 \times 5^{x+5} = 625 \times 5^{x+5} = 5^4 \times 5^{x+5} = \boxed{5^{x+9}}$$

۴)

$$a * b = a^b \qquad \frac{2 * \overbrace{(2 * \overbrace{(2 * 2)}^{2^2})}^{2^{2^2}}}{\underbrace{(\underbrace{(2*2)}_{2^2} * 2)}_{(2^2)^2} * 2} = \frac{2^{2^{(2^2)}}}{((2^2)^2)^2} = \frac{2^{16}}{2^8} = \boxed{2^8}$$

ج) $0<a<1$ ، $m,n\in \mathbb{Z}$ ، $a^m=-a^n \Leftarrow m=-n$ گزاره غلط است

با توجه به شرط که داریم $m,n\in \mathbb{Z}$ ، $m=-n$ ، تنها ۳ حالت برای m,n داریم:

$$\begin{cases} \boxed{m=1,\ n=-1} \\ \boxed{m=n=0} \\ \boxed{m=-1,\ n=1} \end{cases}$$

در هر کدام از ۳ حالت فوق $a^m \neq -a^n$ زیرا با شرط $0<a<1$ ، $a^m>0$ ، $-a^n<0$

است.

مثال نقض:

$$a=\frac{1}{2}\ ,\ m=1\ ,\ n=-1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^1 \neq -\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

د) اگر $a^n=1 \Leftarrow n=0$

گزاره غلط است: اگر $a=1$ باشد، n می‌تواند هر عدد حقیقی باشد و تنها $n=0$ نیست.

اگر $a=(-1)$ باشد، n می‌تواند هر عدد صحیح زوجی را اختیار کند، مثال:

$$\left.\begin{array}{l} n=-4 \\ a=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow (-1)^{-4}=1$$

ه) $a^n=b^n \Leftarrow a=b$

گزاره غلط است، به عنوان مثال نقض، اگر $a=-b$ باشد و n زوج باشد، باز هم $a^n=b^n$

مثال:

$$\left.\begin{array}{l} a=2 \\ b=-2 \\ n=4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2^4=(-2)^4$$

بنابراین با شرط n زوج بودن، $a=\pm b$ است.

و) $a^n=a^m \Leftarrow n=m$ گزاره غلط است.

✓ به عنوان مثال، اگر $a=1$ باشد، لزوماً m با n مساوی نیست، مثال: $a=1$ ، $1^5=1^7$ ، $5\neq 7$

✓ و یا اگر $a=-1$ باشد، n و m لزوماً برابر نیستند:

$$\left.\begin{array}{l} a=-1 \\ m=2 \\ n=4 \end{array}\right\} \Rightarrow (-1)^2=(-1)^4\ ,\ 2\neq 4 \qquad \left.\begin{array}{l} a=-1 \\ m=1 \\ n=5 \end{array}\right\} \Rightarrow (-1)^1=(-1)^5\ ,\ 1\neq 5$$

✓ و اگر $a=0$ باشد، باز هم لزوماً m با n برابر نیست:

$$\left.\begin{array}{l} a=0 \\ m=1 \\ n=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0^1=0^2\ ,\ 1\neq 2$$